Weierstrass per ell mateix: alguns trets del seu pensament matemàtic

Jornada WEIERSTRASS a l'FME 25/03/2015

Mª Rosa Massa Esteve
Departament de Matemàtica Aplicada I
Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica
Universitat Politècnica de Catalunya

Resum: El coneixement de Karl Weierstrass (1815-1897) a través dels teoremes que s'estudien a les classes de matemàtiques ens aporta una visió parcial del personatge.

En aquesta ponència es pretén enriquir aquesta visió apropant-nos tant a l'home com al matemàtic, des d'un altre vessant, a través de les seves paraules i dels seus deixebles.

Es reflexionarà sobre alguns trets característics de les contribucions de Weierstrass a la matemàtica, com ara la unitat del seu pensament matemàtic, la seva fonamentació aritmètica de l'Anàlisi i la seva cerca del rigor.

Índex

1. Introducció

Les matemàtiques del segle XIX abracen el desenvolupament de moltes branques tradicionals de la matemàtica i el sorgiment de moltes de noves. A tall d'exemple es poden citar: la teoria de funcions d'una variable complexa, les funcions automòrfiques, les equacions diferencials, els grups, els agregats infinits, el càlcul de variacions, la teoria de nombres, la geometria projectiva, la geometria diferencial i la geometria no euclidiana entre d'altres (Pierpont, 1999).

Si hom es fixa només en les aportacions de Weierstrass, llavors cal anomenar els antecedents i precursors de l'Anàlisi Matemàtica. Començant amb François Viète (1540-1603) i la seva l'obra *In artem analyticen isagoge* (1591) qui va fer palès l'avantatge d'utilitzar símbols dins la matemàtica no només per representar la incògnita, sinó també per les quantitats conegudes a les equacions i també posà en connexió l'àlgebra i la geometria, determinant les equacions que corresponen a diverses construccions geomètriques, emergint el que avui s'anomena l'algebrització de les matemàtiques del segle XVII (Massa, 2012). Aquest procés, que va donar lloc a la geometria analítica i al càlcul infinitesimal, va ser desenvolupat principalment per una banda, amb les obres de René Descartes (1596-1650) i Pierre de Fermat (1601-1655) i per l'altra, amb les contribucions d'Isaac Newton (1642-1727) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Al segle següent, els matemàtics van treballar en difondre i estudiar les obres d'aquests autors, així figures com Leonhard Euler (1707-1783), Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) i Pierre-Simon Laplace (1749-1827) van perfeccionar els mètodes analítics i van aplicar-los satisfactòriament per resoldre problemes terrestres i celestes (Hawkins, 1977, 121).

I a grans trets, a l'Anàlisi Matemàtica del segle XIX, els matemàtics es van dedicar a fonamentar rigorosament moltes de les aportacions empíriques del segle anterior, a estudiar els objectes matemàtics abstractes i les seves relacions, tot deixant de banda moltes vegades un vessant més intuïtiu, i a centrar la seva recerca en entendre la naturalesa dels conceptes més que en saber com operaven les fórmules (Bräting, 2012, 303-304). De fet, aquestes característiques es poden apreciar en el desenvolupament de l'Anàlisi Matemàtica de Weierstrass que es descriurà tot seguit.

En la ponència, en una primera part, s'intenta mostrar qui era i com era Weierstrass a través de les seves paraules i de les dels seus deixebles, sense deixar de mencionar en quin context intel·lectual va viure i es va desenvolupar la seva obra. En una segona part, es tracten alguns trets determinants del pensament matemàtic de Weierstrass i s'aporten alguns elements de reflexió que aquest estudi ha suggerit.

2.Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897): l'home

2.1. La seva formació[1]

Karl Weierstrass va néixer el 31 d'octubre de 1815 a Ostenfelde, districte de Warendorf (Prússia; actualment Alemanya). El seu pare Wilhelm, membre d'una família d'artesans i petits comerciants des del segle XVI, home intel·ligent, format i que apreciava la bona educació, era llavors secretari de l'alcalde.

Quan Karl tenia vuit anys el seu pare va entrar al servei de l'administració pública de Prússia, això va fer que haguessin de traslladar-se sovint de ciutat i que Karl anés a diverses escoles primàries.[2] L'any 1829, Karl va entrar a l'Institut Catòlic de Paderborn on esdevingué un estudiant excel·lent, essent declarat "el millor de tots" en diverses matèries, entre elles la matemàtica. És també en aquesta època que Karl treballà com a comptable, per ajudar a l'economia familiar, i que començà a llegir regularment la influent revista de matemàtiques *Journal de Crelle*: *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* (Revista de matemàtiques pures i aplicades).[3]

---

[1]Per la biografia de Weierstrass trobareu més informació a Biermann, 1970-1990 i a Richter, 1983, entre d'altres.

[2]Weierstrass tenia un germà i dues germanes, cap d'ells es va casar. L'any 1826 es va morir la seva mare Theodora Vonderforst i el seu pare es va tornar a casar l'any 1828.

[3]És una de les revistes de matemàtiques més prestigioses, que encara es publica avui en dia i, que fou fundada per l'enginyer berlinès August Leopold Crelle (1780-1855), l'any 1826. La revista va publicar els avenços més rellevants de la matemàtica del segle XIX amb articles d'Abel, Jacobi, Weierstrass i de molts altres matemàtics importants.

L'any 1834, després de deixar l'institut, Karl (Figura 1) va complaure al seu pare, que volia que estudiés finances públiques i administració, entrant a la Universitat de Bonn. Després de vuit semestres (1838) sense aprovar res, va tornar a casa dient que no volia estudiar aquesta carrera. No obstant a Bonn havia començat a estudiar matemàtiques i llegí el *Traité de Mécanique céleste* (1799-1825) de Laplace que el va impressionar. També llegí l'obra de Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (1829), que li va resultar massa complicada i decidí llegir una obra anterior d'Adrien-Marie Legendre (1752-1833), *Traité des fonctions elliptiques* (1825) i apunts de les classes sobre funcions el·líptiques del que seria posteriorment el seu mestre, Christoff Gudermann (1798-1852).[4]

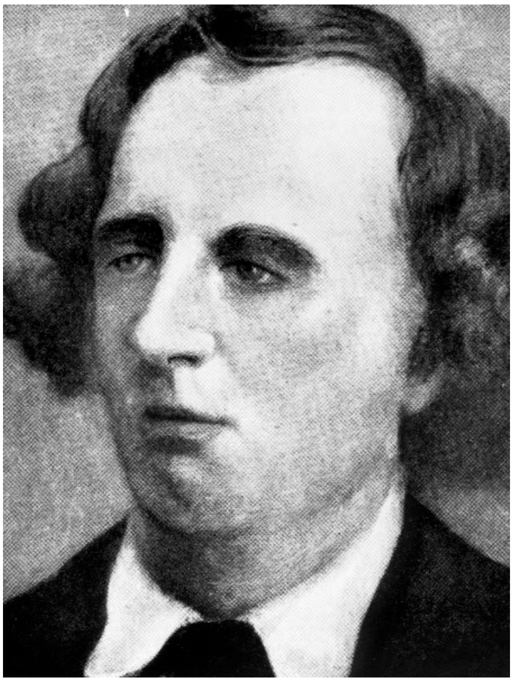


Figura 1. Karl Weierstrass.

L'hivern de 1837/38 va decidir estudiar matemàtiques en llegir la carta d'Abel a Legendre de l'any 1830 a la revista *Journal de Crelle*. Weierstrass ho explica més tard, en una carta a Sophus Lie (1842-1899), el 10 d'abril de 1882 (Biermann, 1970-1990, 219-220),

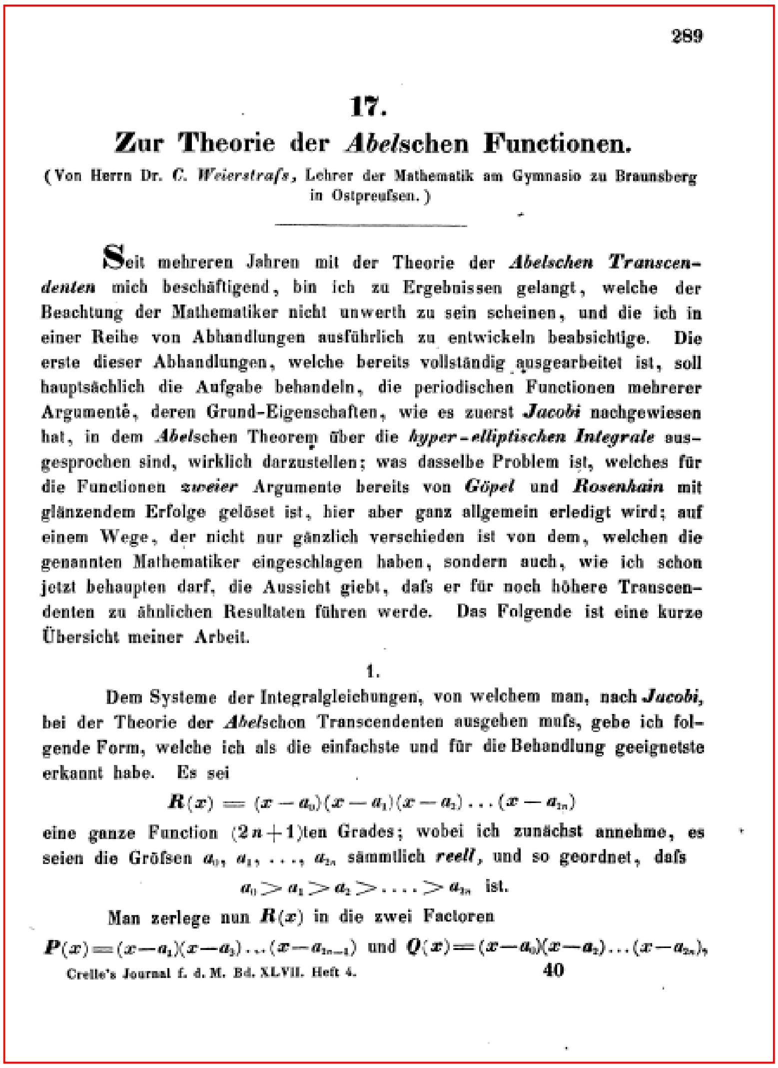
[4]Gudermann després de ser professor de secundària va esdevenir professor ordinari de matemàtiques a l'Acadèmia Teològica i Filosòfica de Münster. Allà va ensenyar a Weierstrass entre 1839 i 1841 i li va transmetre les seves idees sobre les funcions analítiques desenvolupables en sèries de potències convergents. Més informació a Manning (1975).

> “Per mi, aquesta carta (d’Abel a Legendre), quan me’n vaig adonar a *Crelle* durant els meus anys d’estudiant, va ser de gran importància. La derivació immediata de la forma de representació de la funció donada per Abel, i designada per ell per λ(x), definint aquesta funció a partir de l’equació diferencial, va ser la primera tasca matemàtica que em vaig posar a mi mateix; i la seva afortunada solució em va decidir a dedicar-me totalment a les matemàtiques; vaig prendre aquesta decisió en el meu setè semestre (hivern de 1837/38), encara que originalment jo havia començat els estudis de finances públiques i administració [*N. H. Abel, Mémorial* (1902), 108].”

El 22 de Maig de 1839, Weierstrass començà a estudiar a la Universitat de Münster per a ser professor de secundària. L’any 1841 va obtenir-ne el títol i escrigué el seu primer article sobre la teoria de sèries de potències i la seva convergència.[5] Quan estudiava a Münster, va assistir a les classes sobre les funcions el·líptiques de Gudermann. Reconeixent el seu talent, aquest va insistir-li que continués els seus estudis de matemàtiques. De fet, en el seu informe d’avaluació, Gudermann escriu que Weierstrass era: “d’igual rang que els inventors que s’havien coronat amb glòria.”

Des de l’any 1842 a l’any 1855, Weierstrass esdevingué professor de secundària primer a Deutsch-Krone (1842-1848), i després a Braunsberg (1848-1855). L’any 1850 començà a trobar-se malament i va tenir atacs de vertigen que se li repetirien durant 12 anys. Foren anys durs d’investigació en solitari, sense biblioteques i sense correspondència. Tanmateix l’any 1854 publicà a *Journal de Crelle* l’article “Zur Theorie der *Abel*schen Functionen” (Sobre la teoria de les funcions abelianes), on presenta una descripció del seu mètode per a la representació de les funcions abelianes per mitjà de les sèries de potències convergents (Figura 2). Quasi de seguida, el 31 de març de 1854, la Universitat de Königsberg li va conferir el grau de doctor *honoris causa*.

[5] Primer text important de Weierstrass sobre la convergència de les sèries de potències de l’any 1841 (Münster, *imHerbst* (a la tardor) 1841), que no fou publicat fins que Weierstrass va començar la publicació de les seves obres, 53 anys més tard (Weierstrass, Band I, 1894, p. 67).



289

17.

Zur Theorie der *Abel*schen Functionen.

(Von Herrn Dr. *C. Weierstrafs*, Lehrer der Mathematik am Gymnasio zu Braunsberg in Ostpreufsen.)

Seit mehreren Jahren mit der Theorie der ***Abelschen Transcendenten*** mich beschäftigend, bin ich zu Ergebnissen gelangt, welche der Beachtung der Mathematiker nicht unwerth zu sein scheinen, und die ich in einer Reihe von Abhandlungen ausführlich zu entwickeln beabsichtige. Die erste dieser Abhandlungen, welche bereits vollständig ausgearbeitet ist, soll hauptsächlich die Aufgabe behandeln, die periodischen Functionen mehrerer Argumentê, deren Grund-Eigenschaften, wie es zuerst ***Jacobi*** nachgewiesen hat, in dem ***Abel***schen Theorem über die ***hyper-elliptischen Integrale*** ausgesprochen sind, wirklich darzustellen; was dasselbe Problem ist, welches für die Functionen ***zweier*** Argumente bereits von ***Göpel*** und ***Rosenhain*** mit glänzendem Erfolge gelöset ist, hier aber ganz allgemein erledigt wird; auf einem Wege, der nicht nur gänzlich verschieden ist von dem, welchen die genannten Mathematiker eingeschlagen haben, sondern auch, wie ich schon jetzt behaupten darf, die Aussicht giebt, dafs er für noch höhere Transcendenten zu ähnlichen Resultaten führen werde. Das Folgende ist eine kurze Übersicht meiner Arbeit.

1.

Dem Systeme der Integralgleichungen, von welchem man, nach ***Jacobi***, bei der Theorie der ***Abel***schen Transcendenten ausgehen mufs, gebe ich folgende Form, welche ich als die einfachste und für die Behandlung geeignetste erkannt habe. Es sei

$$R(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2n})$$

eine ganze Function $(2n+1)$ten Grades; wobei ich zunächst annehme, es seien die Gröfsen $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ sämmtlich *reell*, und so geordnet, dafs

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_{2n} \text{ ist.}$$

Man zerlege nun $R(x)$ in die zwei Factoren

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2n-1}) \text{ und } Q(x) = (x-a_0)(x-a_2)\dots(x-a_{2n}),$$

Crelle's Journal f. d. M. Bd. XLVII. Heft 4. 40

Figura 2. Article a *Journal de Crelle* (Weierstrass, 1854).

L'any 1856, Weierstrass tornà a publicar a *Journal de Crelle,* aquesta vegada el famós article que aprofundeix en la teoria de les funcions abelianes: "Theorie der *Abel*'schen Functionen" (Teoria de les funcions abelianes), on prova els resultats que en l'article de l'any 1854 havia només descrit (Figura 3). Segons David Hilbert (1862-1943), Weierstrass havia obtingut un dels més grans resultats de l'Anàlisi, la solució del problema de Jacobi sobre la inversió d'integrals hiperel·líptiques.

235

19.

Theorie der *Abel*'schen Functionen.

(Von Herrn Dr. *C. Weierstrafs.*)

Einleitung.

Das *Abel*'sche Theorem über die hyperelliptischen Integrale bildet die Grundlage für die Theorie einer neuen Gattung analytischer Functionen, die deswegen passend *Abel'sche Functionen* genannt, und folgendermafsen definirt werden können.

Es bedeute

$$R(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2\varrho+1})$$

eine ganze Function $(2\varrho+1)$ten Grades von x, wobei angenommen werde, dafs unter den Gröfsen

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots \quad a_{2\varrho+1}$$

keine zwei gleiche sich finden, während sie im Übrigen beliebige (reelle und imaginäre) Werthe haben können. Ferner seien $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$ ϱ unbeschränkt veränderliche Gröfsen, und zwischen diesen und eben so vielen von ihnen abhängigen $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ die nachstehenden Differential-Gleichungen, in denen

$$P(x) \text{ das Product } (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)$$

bedeutet, gegeben:

$$du_1 = \tfrac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_1}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \tfrac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_1}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \dots + \tfrac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_1}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},$$

$$du_2 = \tfrac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_2}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \tfrac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_2}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \dots + \tfrac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_2}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$du_\varrho = \tfrac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_\varrho}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \tfrac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_\varrho}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \dots + \tfrac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_\varrho}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x_\varrho)}};\text{*)}$$

*) Man kann diesen Differential-Gleichungen mancherlei verschiedene Formen geben; die hier gewählte vereinfacht die Rechnung nicht unwesentlich, ohne dafs, wie später soll gezeigt werden, der Allgemeinheit Abbruch geschieht.

Crelle's Journal f. d. M. Bd. LII. Heft 4. 37

Figura 3. Article a *Journal de Crelle* (Weierstrass, 1856).

Finalment, i gràcies a aquest article, el 14 de juny de 1856 deixà l'institut de secundària i entrà al *Berliner Gewerbeinstitut* de la *Technische Universität Berlin*. Un any després va ser nomenat membre de l'Acadèmia de les Ciències de Berlín i pocs anys després, l'any 1861, obtingué la plaça de professor a la Universitat de Berlín.

2.2. L'ensenyament-recerca de Weierstrass a la Universitat de Berlín

La Universitat de Berlín (Figura 4) va ser creada l'any 1810, i des de l'any 1830 a 1840 ja havia comptat amb una situació privilegiada amb Jacobi, Johan Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) i Jakob Steiner (1796-1863). Però l'any 1851 va morir Jacobi, i l'any 1855 Dirichlet se'n va anar a la Universitat de Göttingen a substituir Carl Friedrich Gauss

(1777-1855).[6] A Jacobi el substitueix Carl Wilhelm Borchardt (1817-1880)[7] que, des de l'any 1856 i fins a 1880, s'encarregà de la revista *Journal de Crelle* i a Dirichlet, el substitueix Ernst Kummer (1810-1893).[8] A aquests matemàtics s'hi va afegir Leopold Kronecker (1823-1891), alumne de Kummer i abans alumne de Dirichlet. Kummer obté tan bona impressió de Weierstrass que li aconsegueix un lloc com a professor extraordinari a la Universitat de Berlín, l'any 1864 n'esdevindrà ja catedràtic, i els cursos 1873/74 i 1874/75 va ser-ne rector.

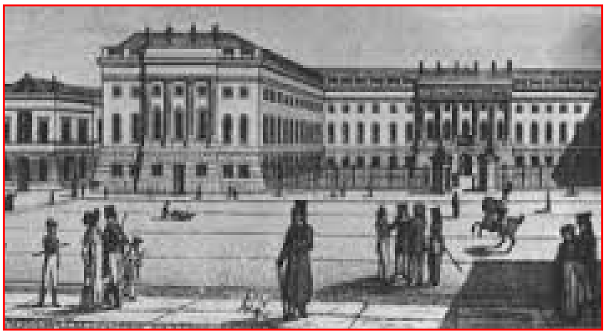


Figura 4. La Universitat de Berlín al segle XIX.

Kummer i Kronecker formen amb Weierstrass el triumvirat que impartia els cursos que esdevindrien tan famosos de la Universitat de Berlín. Alguns títols dels primers anys mostren la rellevància de les aplicacions de la matemàtica a la física i a la geometria: 1856/57: "Capítols escollits de la física-matemàtica", 1857: "Els teoremes generals que tracten la representació de les funcions analítiques per sèries convergents", 1857/58: "Problemes escollits de geometria i de mecànica resolts amb l'ajuda de les funcions el·líptiques", 1858: "Alguns capítols escollits del càlcul integral" i "Nova geometria".

A partir de l'any 1856, Weierstrass, Kummer i Kronecker aconseguiren que la Universitat de Berlín esdevingués un centre de gran prestigi per als estudis de matemàtiques. Tanmateix en aquesta època, Weierstrass seguia patint problemes de

[6]A partir de l'any 1855, a la Universitat de Göttingen, Dirichlet amb Riemann i Dedekind, formen un grup de matemàtics comparable amb el formats a Berlín i a París. Per més informació vegeu Ferreirós, 1993, 47-53.
[7]Borchardt, alumne de Dirichlet, va ser amic incondicional i company de Weierstrass des de que va entrar a la Universitat de Berlín.
[8]El fet és que l'any 1861, Kummer va ser escollit membre de l'Acadèmia de les Ciències, la qual cosa li va permetre donar classes a la Universitat de Berlín.

salut, en aquest cas bronquitis i flebitis, i moltes vegades havia de fer les classes assegut.[9] Des de l'any 1861 al 1886 van desenvolupar un pla bianual de cursos i cada dos anys repetien el mateix programa: "Introducció a la teoria de les funcions analítiques", "Teoria de les funcions el·líptiques", "Aplicacions de les funcions el·líptiques", "Teoria de les funcions abelianes", "Aplicacions de les funcions abelianes" i "Càlcul de variacions". Eren cursos molt reconeguts arreu d'Europa, hi assistien centenars d'alumnes cada any, alguns d'ells van esdevenir deixebles de Weierstrass. També hi assistien alumnes d'estudis post-doctorals. Així Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) explica que l'any 1873, quan va arribar a Paris a fer estudis post-doctorals amb Charles Hermite (1822-1901), les primeres paraules d'aquest van ser: "Vostè ha comès un error, senyor, em va dir ell. Vostè hauria degut seguir els cursos de Weierstrass a Berlín. Ell és el nostre mestre."[10] I Mittag-Leffler així ho va fer. Calinger (1996, 166) explica que l'any 1882, el mateix Weierstrass reconeixia que amb aquests cursos els estudiants tenien: "l'oportunitat de començar amb una sèrie de lliçons bianuals a tractar la més important disciplina matemàtica en mesurada successió. Els tòpics que cobreixen són llegits poc o gens en altres universitats o no ho són amb regularitat."

Una altra de les aportacions importants de Weierstrass va ser la creació d'un seminari de matemàtiques a la Universitat de Berlín l'any 1860. Kummer i Weierstrass van presentar la sol·licitud al ministre de cultura Moritz von Bethmann-Hollweg que incloïa dos objectius: 1) Preparar millor als estudiants per ser professors, donant un coneixement més profund de les matemàtiques i 2) Donar als estudiants experiència directa per obtenir de manera independent nous descobriments matemàtics.[11]

El número vuit de la regulació del seminari de matemàtiques de la Universitat de Berlín descrivia que els seminaristes havien de participar en uns seminaris-tutories presentant una part de la seva recerca tant oral com escrita. La part oral a vegades era una discussió oberta sobre la resolució de problemes matemàtics seleccionats proposats

---

[9] Degut a la seva malaltia alguns cursos no els va poder impartir, l'últim curs el va donar el 1889/90.
[10]"Vous avez fait erreur, Monsieur, me dit-il ; vous auriez dû suivre les cours de Weierstrass à Berlin. C'est notre maître à tous."(Mittag-Leffler, 1902, 131).
[11] Hi ha diversos estudis sobre el rol i la rellevància del seminari de matemàtiques de Berlin, vegeu per exemple, Mehrtens, Bos & Schneider (eds), 1981, Calinger, 1996 i Begehr, 1998.

pels directors o bé pels mateixos seminaristes. Segons Weierstrass, només l'experiència de la recerca en generar nou coneixement pot il·luminar "els fonaments i la claredat" de les matemàtiques, la qual cosa és vital per excel·lir en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques.

En el seminari de matemàtiques, que va durar uns vint anys, el nombre de participants estava limitat a dotze per any i per entrar-hi havien de presentar un article o bé passar un examen. Els seminaristes tenien a la seva disposició una molt bona biblioteca (obres d'Abel, Cauchy, Euler, Monge i Poisson, entre d'altres), la idea era treballar sempre que fos possible amb les fonts originals. També estaven subscrits a les revistes de matemàtiques més importants del segle XIX com ara: *Journal de Crelle*, *Liouville* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*) i *Archiv der Mathematik und Physik*. També hi havia premis de recerca cada any. Així va ser com a través d'aquest seminari de matemàtiques els bons estudiants varen ser reconeguts i ajudats. Entre els participants trobem nombroses figures rellevants com ara Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) i Wilhelm Killing (1847-1923).

En haver-hi un nombre tan petit de seminaristes, Emil Lampe (1840-1918), Hermann Schwarz (1843-1921) i altres, van formar en paral·lel el novembre de 1861 un grup anomenat *Unió Matemática*. Aquesta associació estava formada pels estudiants i organitzaven conferències, debats i resolien problemes per millorar el coneixement matemàtic. La *Unió*, que va començar amb dotze membres, i cap el 1880 ja en tenia uns vuitanta, va esdevenir un model per altres universitats alemanyes. Weierstrass assistia també a les conferències i a les reunions de la *Unió* participant activament i debatent sobre els problemes matemàtics plantejats (Calinger, 1996, 165).

Les idees de Weierstrass sobre l'ensenyament-recerca de les matemàtiques queden ben reflectides en la seva conferència del 15 d'octubre del 1873, en ser nomenat rector de la Universitat de Berlín. Weierstrass assenyalava la importància de la selecció de materials en l'ensenyament dels professors universitaris, i l'èmfasi posat en els punts més rellevants:

"L'èxit en la instrucció acadèmica depèn en gran mesura de la guia contínua del professor a l'alumne en algunes investigacions. Això, tanmateix, no es produeix només mitjançant la direcció pedagògica sinó principalment a través de la disposició dels materials i l'èmfasi, l'exposició de les lliçons del professor sobre la disciplina permet a l'alumne discernir les idees principals de manera apropiada. D'aquesta manera, el pensador plenament familiaritzat avança lògicament des de la madura i prèvia recerca i aconsegueix nous resultats o millors fonaments que els que existeixen."[12]

També Weierstrass en aquesta conferència explicava que el professor ha de donar a conèixer els camins no reeixits o bé que s'intueixen, sense amagar-ne les dificultats o els errors comesos,

"A continuació (el professor) no ha de deixar de determinar barreres encara no creuades per la ciència i assenyalar algunes posicions des de les que seria possible un major avançament. Un (professor universitari) tampoc ha de negar a l'alumne una visió més profunda del progrés de les seves pròpies investigacions, ni ha de romandre en silenci sobre els seus propis errors del passat o (sobre les seves) decepcions."[13]

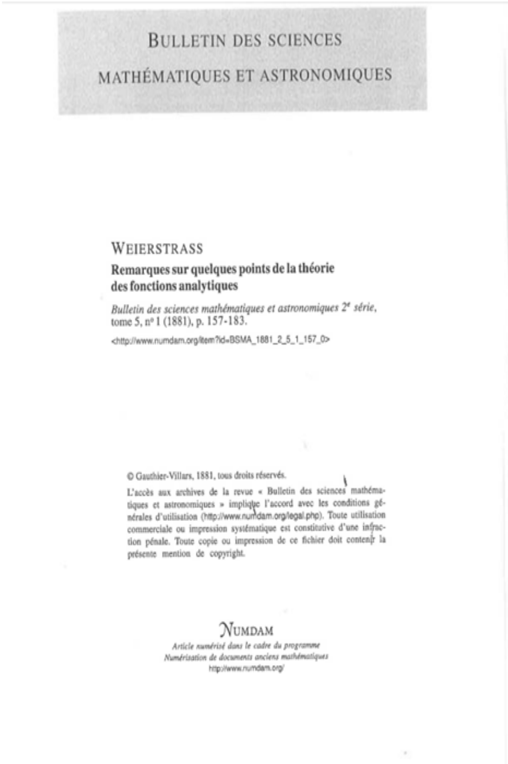
Les diferències d'opinió entre Kronecker i Weierstrass ja van començar cap el 1870, degut a que els seus camps d'investigació eren essencialment diferents i tenien

[12] „Der Erfolg des akademischen Unterrichts beruht, wie Sie vernommen haben, zum grossen Theile darauf, dass der Lehrer den Lernenden fortwahrend zu eigener Forschung anleitet. Dies geschieht aber nicht etwa durch pädagogische Anweisung, sondern zunächst und hauptsächlich dadurch, dass der Lehrer beim Vortrag einer Disciplin in seiner Darstellung selbst durch Anordnung des Stoffes und Hervorhebung der leitenden Gedanken angemessen den Lernenden erkennen lässt, auf welchem Wege der gereifte und das bereits Erforschte beherrschende Denker folgerichtig vorschreitend zu neuen Ergebnissen oder besserer Begründung schon vorhandener gelangt." (Weierstrass, 1894-1927, 335).

[13] « Dann versäumt er es nicht, ihm die zur Zeit nicht überschrittenen Grenzen der Wissenschaft zu bezeichnen und diejenigen Punkte anzudeuten, von denen aus ein weiteres Vordringen zunachst moglich scheint. Auch einen tieferen: Einblick in den Gang seiner eigenen Forschungen versagt er ihm nicht, verschweigt selbst nicht begangene Irrthümer und getauschte Erwartungen." (Weierstrass, 1894-1927, 336).

diferències d'opinió. Un dels punts més conflictius fou que Kronecker no admetia la recerca del deixeble de Weierstrass, Georg Cantor (1845-1918).[14]

Quant a les publicacions, Weierstrass degut a les controvèrsies amb Kronecker i veient que tot el seu llegat perillava començà a publicar articles (Figura 5).



BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

WEIERSTRASS

Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 157-183.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_157_0>

Figura 5. Article de Weierstrass (1881) al *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*.

En aquest article de 1881 titulat "Remarques sobre alguns punts de la teoria de funcions analítiques", Weierstrass aclareix alguns punts sobre les seves idees de la teoria de funcions analítiques matisant la relació intuïtiva entre continuïtat i derivabilitat (vegeu apartat 3.2 d'aquest text). Weierstrass hi cita el seu famós exemple de funció contínua no diferenciable a cap punt (vegeu aquesta funció a la Figura 6) i aclareix també que la demostració de la no derivabilitat l'havia enviat per carta a Du Bois-Reymond i aquest l'havia publicat l'any 1875 al *Journal de Crelle* (Du Bois-Reymond, 1875, 29-31).

[14] Sobre les diferències entre Weierstrass I Kronecker, Schubring recentment ha trobat i resumit les idees principals de 43 cartes que mostren les seves discussions (Schubring, 1998). També sobre les relacions de Weierstrass amb Riemann i amb l'escola francesa podeu consultar Neuenschwander, 1981.

Weierstrass ja havia presentat a l'Acadèmia de Ciències de Berlín aquest famós exemple de funció contínua sense derivada, el 18 de Juny de 1872 (Dugac, 1973, 93).

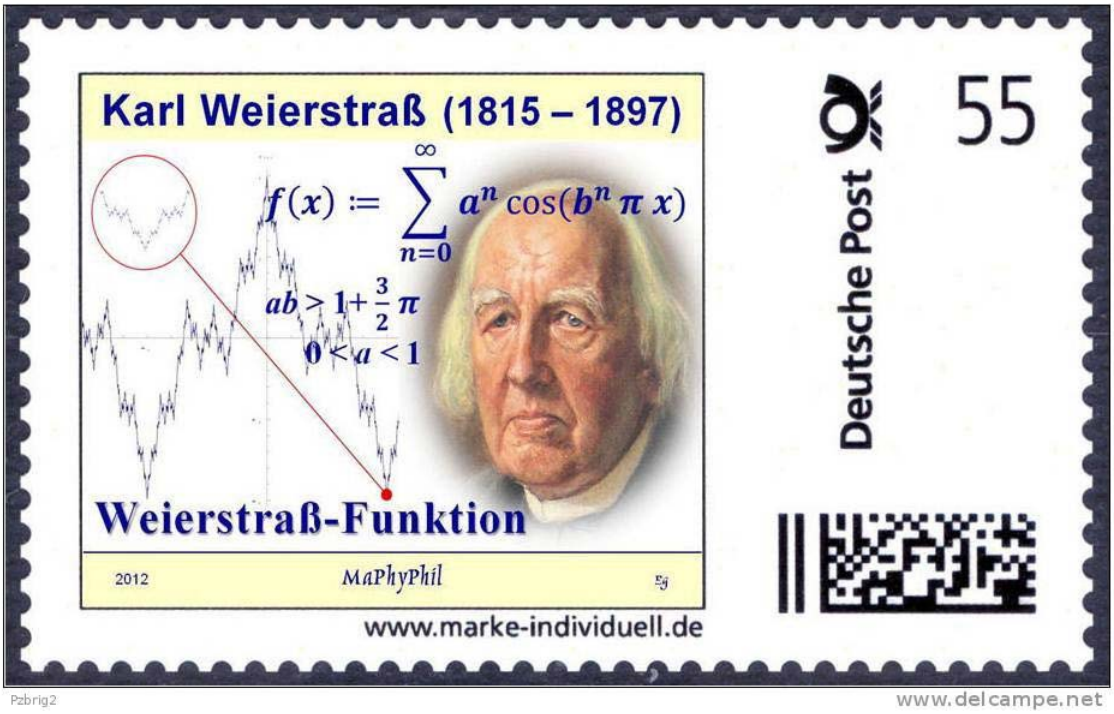


Figura 6. Segell commemoratiu que il·lustra el famós exemple de Weiertrass.

Encara que els cursos de Weierstrass foren publicats pels seus alumnes al llarg de la seva vida,[15] ell mateix començà a editar les seves obres completes: l'any 1894 el primer volum (Weierstrass, 1894), el segon volum l'any 1895, i després de la seva mort els seus deixebles Johannes Knoblauch (1855-1915) i Georg Hettner (1854-1914) van editar fins a 7 volums, l'últim l'any 1927. Van ser reimpresos l'any 1967. També cal assenyalar que Weierstrass va editar les obres completes de Jacobi, Dirichlet, Steiner i les cartes de Gauss.[16]

Weierstrass va ser premiat l'any 1892 amb la medalla Helmholtz per l'Acadèmia de Ciències de Berlín (figura 7) i l'any 1895 amb la medalla Copley, el més alt guardó de la *Royal Society* de Londres. Va passar els tres darrers anys de la seva vida en cadira de

[15] Els cursos de Weierstrass publicats pel seus deixebles van ser: Schwarz (1861), Kossak (1865/66), Hettner (1874), Hurwitz (1878), Pincherle (1878), Dantscher (1884/85) i Thieme (1886). Més informació sobre el contingut dels diferents cursos de Weierstrass a Dugac (1973, 63- 89).

[16] Encara que Weierstrass vivia amb les seves germanes, necessitava d'un complement salarial com editor, ja que cuidava dels sis fills del seu amic Borchardt, que havia mort el 1880.

rodes, immòbil i dependent i va morir a Berlín d'una pneumònia el 19 de febrer de 1897 quan tenia 82 anys.

Figura 7. Medalla Helmholz a Weierstrass de l'any 1892.

2.3. Els deixebles de Weierstrass

Els deixebles directes que es poden consultar en la pàgina on-line del *Mathematics Genealogy Project,* van ser 41 i els descendents 27.071. Algunes de les figures a qui Weierstrass va dirigir la tesi són molt conegudes: Heinrich Bruns (1848-1919), Frobenius, Hettner, Ludwig Kiepert (1846-1934), Killing, Leo Königsberger (1837-1921), Cantor, Lazarus Fuchs (1833-1902), Kovalèvskaia, Ferdinand Rudio (1856-1929) i Schwarz. Altres figures conegudes només van assistir als seus cursos: Paul Bachmann (1837-1920), Felix Klein (1849-1925), Adolf Hurwitz (1859-1919), Mittag-Leffler, Lie i Otto Stolz (1842-1905), entre d'altres.[17]

A tall d'exemple, presentarem algunes dades sobre una de les deixebles més singulars de Weierstrass: Sofia Kovalèvskaia (Moscow, 1850- Estocolm, 1891) (Figura 8). Sònia (com volia que l'anomenessin) als 18 anys es va casar amb V. O. Kovalevski qui després seria una figura molt reconeguda en paleontologia. Era un matrimoni sobre el paper només per poder viatjar a l'estranger a estudiar. Als vint anys, Sònia va anar des d'Heidelberg, on havia assistit a les classes de matemàtiques de Königsberger, a Berlín per estudiar matemàtiques amb Weierstrass.

Weierstrass es va convèncer de seguida del talent de Sònia. Encara que no va aconseguir la seva admissió al programa de doctorat de la Universitat de Berlín, li va donar classes particulars fins l'estiu de l'any 1874.

Figura 8. Retrat de Sònia Kovalèvskaia.

[17] Es conserven les cartes de Weierstrass amb els seus deixebles a l'Institut Mittag-Leffler a Suècia i a d'altres instituts alemanys segons Dugac (1973) i Schubring (1998).

L'agost de 1874, Sònia va obtenir el doctorat de la Universitat de Göttingen. Va sotmetre-hi tres manuscrits,[18]un d'ells el teorema que garanteix l'existència d'una solució analítica a un cert tipus d'equació diferencial amb coeficients analítics i que avui és anomenat teorema de Cauchy-Kovalèvskaia.

L'any 1884 Sònia va obtenir una càtedra d'Anàlisi Superior a la Universitat d'Estocolm, de fet fou la primera dona catedràtica de matemàtiques. Més tard, el 24 de desembre de 1888, Sònia Kovalèvskaia va rebre el prestigiós Premi Bordin de l'*Académie des Sciences* pels seus resultats sobre la rotació d'un cos rígid al voltant d'un punt fix. De fet, el jurat considerà la memòria presentada d'una qualitat tan bona que va augmentar la dotació del premi. Weierstrass en assabentar-se del premi li escriu expressant-ne la seva alegria:

> "Febrer 1889. No fa falta que t'asseguri de quina manera el teu èxit ens ha alegrat el cor, principalment a mi i a les meves germanes, així com als teus amics d'aquí, Fuchs, Hettner, Knoblauch, Heusel, P. Dubois i Hansemann recentment retornat. Jo en sento molt particularment una veritable satisfacció; ara, doncs, jutges competents han pronunciat el veredicte que la meva "fidel alumna", la meva "feblesa", no és tanmateix un "va engany"."[19]

Sònia va mantenir correspondència amb Weierstrass durant 20 anys. Va morir molt jove, tenia 41 anys, Weierstrass cremà totes les seves cartes i va caure en una gran tristor. Aquesta informació sobre la relació entre Weiertrass i Sònia es troba als *Comptes Rendus* del Congrés Internacional de Matemàtics de l'any 1900 on Mittag-Leffler reprodueix les cartes de Weierstrass a Sònia, amb moltes demostracions i teoremes.[20]

[18]Un sobre equacions diferencials, un altre sobre integrals abelianes i un tercer, sobre els anells de Saturn.
[19]"Février 1889- Je n'ai pas besoin d'assurer combien ton succès nous a réjoui le cœur à moi et à mes sœurs, avant tous, ainsi qu'à tes amis d'ici, Fuchs, Hettner, Knoblauch, Heusel, P. Dubois et Hansemann, récemment revenu. J'en éprouve tout particulièrement une vraie satisfaction; des juges compétents ont donc maintenant prononcé le verdict que ma "fidèle élève", ma "faiblesse", n'est pourtant pas un "vain humbug". » (Mittag-Leffler, 1902, 152-153).
[20]Encara hi ha un altre article de Mittag-Leffler sobre la relació deWeierstrass i Sònia, vegeu Mittag-Leffler, 1923. Més informació sobre Kovalèvskaia a Détraz, 1993.

Cal assenyalar també que Kovalèvskaia a més de matemàtica era escriptora i poetessa, i com Weierstrass, pensava que un matemàtic que no és una mica poeta no és un bon matemàtic.

Els seus companys–deixebles li van preparar una gran festa quan va fer 70 anys i li van regalar un àlbum de fotos amb dedicatòries (Figura 9). Aquest àlbum el va trobar Bölling a la biblioteca de la *Humboldt-Universität zu Berlin* 70 anys més tard, i el va recuperar i difondre.[21]

Figura 9. Portada de l'àlbum de fotos que li van regalar.

A la festa d'aniversari de Weierstrass del 31 d'octubre de 1885 hi van assistir 320 figures d'arreu d'Europa i tots ells es troben fotografiats en l'àlbum, molts d'ells amb dedicatòries entranyables. La idea de regalar a Weierstrass un àlbum de fotos sembla que havia sorgit relativament tard a l'estiu de l'any 1885, ja que els preparatius de l'aniversari havien començat molt abans, a mitjan 1884. En un principi, Mittag-Leffler va proposar que se li fes un bust i es constituís una comissió per trobar fons, però a l'agost de l'any 1884 es va valorar la realització d'una medalla. A l'octubre següent, Schwarz va

[21] Més informació sobre els preparatius i el desenvolupament de la celebració de l'aniversari de Weierstrass a Bölling, 1989 i 1994.

comunicar a Kronecker i a Fuchs els desitjos d'oferir-li una medalla com a present que, finalment, va ser el que se li va regalar, a més de l'àlbum de fotos amb dedicatòries (Figura 10).

Figura 10. Fotos de Kovalèvskaia i d'altres deixebles (Bölling, 1994).

Així, amb motiu del 70è aniversari de Weierstrass (1885) es va fer una medalla commemorativa en honor seu i en el 80è aniversari (1895) un retrat que va ser solemnement descobert a la Galeria Nacional de Berlín (Figura 11).

Figura 11. Retrat de Weierstrass en el seu 80 aniversari.

Quan Weierstrass va morir l'any 1897 van aparèixer escrits d'homenatge a diferents revistes, així Hermite als *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* el 1897 assenyalava els seus avenços i la rellevància dels seus cursos,

> "El savi il·lustre, del qual l'Acadèmia deplora la pèrdua, comparteix amb Riemann i Cauchy la glòria d'haver descobert uns principis fonamentals que han portat l'Anàlisi cap a unes vies noves i han esdevingut l'origen dels grans progressos d'aquesta ciència a la nostra època… Els seus deixebles s'inspiren en els seus treballs…cap d'ells no ha tingut una més gran, ni una més fecunda influència que Weierstrass. El gran geòmetra ha exercit una part considerable d'aquesta influència a través del seu ensenyament on ha prodigat els tresors de la seva

> invenció a un munt d'auditors vinguts de tots els punts d'Europa. Les seves lliçons donaven les premisses de les seves descobertes…" [22]

També Charles Émile Picard (1856-1941) en el seu homenatge a Weierstrass repassava les seves aportacions a les funcions analítiques i a d'altres parts de la matemàtica, i al final del text descrivia la bondat i generositat de Weierstrass (Picard, 1897).[23]

3. Weierstrass, el matemàtic

3.1. La unitat del pensament de Weierstrass

Ja Henri Poincaré (1854-1912) en l'article "L'oeuvre mathématique de Weierstrass" imprès el 26 de febrer de 1898, recent mort Weierstrass, assenyalava com és de difícil de parlar de la seva obra matemàtica :

> "És per això que és tan difícil de fer una ressenya exacta dels treballs matemàtics de Weierstrass, no pas únicament perquè la seva obra impresa és considerable, sinó sobretot perquè aquesta obra no els conté tots enters."[24]

Tanmateix Poincaré en aquest article hi analitza la unitat del pensament de Weierstrass. Comença transcrivint i comentant el discurs d'entrada de Weierstrass a l'Acadèmia de Berlín del 9 de juliol de l'any 1857, on ell mateix explicava les seves investigacions i en quina direcció volia prosseguir, en l'aprofundiment de la teoria de les funcions el·líptiques:

> "Jo haig d'explicar ara en poques paraules quina ha estat fins aquí la marxa dels meus estudis i en quina direcció m'esforçaré a seguir-los. Des del temps, on sota

[22]« Le savant illustre, dont l'Académie déplore la perte, partage avec Riemann et Cauchy la gloire d'avoir découvert des principes fondamentaux qui ont engagé l'Analyse dans des voies nouvelles et sont devenus l'origine des grands progrès de cette science à notre époque. Le monde mathématique réunit dans le même sentiment d'admiration ces génies créateurs dont la trace restera à jamais dans la Science. Leurs noms se trouvent dans tous les écrits. Leurs disciples s'inspirent de leurs travaux et ne cessent d'accroître le domaine de l'Analyse en poursuivant leur œuvre; aucun d'eux n'a eu une plus grande, une plus féconde influence que Weierstrass. Le grand géomètre a exercé une part considérable de cette influence par son enseignement où il a prodigué les trésors de son invention à une foule d'auditeurs venus de tous les points de l'Europe. Ses leçons donnaient les prémisses de ses découvertes… » (Hermite, 1897, 430).

[23] L'any 1897 i el 1899, Killing i Lampe també van escriure els seus articles d'homenatge a Weierstrass.

[24]"C'est pour cela qu'il est si difficile de rendre un compte exact des travaux mathématiques de Weierstrass; ce n'est pas seulement parce que son œuvre imprimée est considérable; c'est surtout parce que cette œuvre ne le contient pas tout entier." (Poincaré, 1899, 3).

> la direcció del meu mestre Gudermann, vaig tenir per primera vegada coneixement de la teoria de les funcions el·líptiques, aquesta nova branca de l'Anàlisi Matemàtica ha exercit sobre la meva intel·ligència una poderosa atracció de tal manera que la influència sobre el desenvolupament del meu pensament ha estat decisiva."[25]

En el discurs donava una pinzellada històrica de la teoria de les funcions el·líptiques:

> "Aquesta disciplina [la teoria de les funcions el·líptiques], fundada per Euler, cultivada amb passió i èxit per Legendre, va ser primer desenvolupada en una direcció única; però ha estat fa deu anys transformada enterament per la introducció de les funcions doblement periòdiques descobertes per Abel i Jacobi."[26]

Les aplicacions de la matemàtica, segueix Weierstrass, promouen el desenvolupament natural la ciència:

> "Aquests transcendents, que doten l'Anàlisi de magnituds noves amb propietats que són remarcables, van trobar també aplicacions a la Geometria i a la Mecànica, i mostraven així que eren el fruit normal d'un desenvolupament natural de la Ciència."[27]

Des de l'època de Münster, quan era encara alumne de Gudermann, Weierstrass veu amb netedat l'objectiu cap el qual marxarà tota la seva vida, no l'oblidarà mai i buscarà sense parar acostar-s'hi, ja que el considerava un dels problemes fonamentals de les matemàtiques,

---

[25]"Je dois maintenant expliquer en quelques mots quelle a été jusqu'ici la marche de mes études et dans quelle direction je m'efforcerai de les poursuivre. Depuis le temps, où sous la direction de mon maître Gudermann, je fis pour la première fois connaissance avec la théorie des fonctions elliptiques, cette branche nouvelle de l'Analyse mathématique a exercé sur mon intelligence un puissant attrait dont l'influence sur le développement de ma pensée a été décisive." Weierstrass, 1857 a Poincaré (1899, 1)

[26]"Cette discipline, fondée par Euler, cultivée avec ardeur et succès par Legendre, s'était d'abord étendue dans une direction unique; mais elle venait depuis dix ans d'être bouleversée entièrement par l'introduction des fonctions doublement périodiques découvertes par Abel et Jacobi." Weierstrass, 1857 a Poincaré (1899, 1).

[27]« Ces transcendants, dotant l'Analyse de grandeurs nouvelles dont les propriétés sont remarquables, trouvaient aussi des applications en Géométrie et en Mécanique, et montraient par là qu'elle s'étaient le fruit normal d'un développement naturel de la science." Weierstrass, 1857 a Poincaré (1899, 1-2).

> "La representació efectiva d'aquestes magnituds, que encara l'Anàlisi no en tenia cap exemple, i l'estudi detallat de les seves propietats va esdevenir doncs un dels problemes fonamentals de les Matemàtiques; i, des de que n'he comprès la importància, vaig decidir d'aventurar-m'hi."[28]

Weierstrass va tenir, des del començament, l'ambició de crear una teoria completa i coherent de les funcions abelianes. Tanmateix, com ell mateix assenyalava, cal exercitar-se primer en els problemes més senzills, Poincaré en aquest article de 1899 compara aquestes paraules de Weierstrass amb les d'un militar quan es prepara per atacar una fortalesa:

> "Això hagués estat una veritable bogeria, si hagués únicament volgut pensar en la solució d'un tal problema, sense haver-me preparat amb un estudi aprofundit dels mitjans existents que devien ajudar-me i sense haver-me exercitat primer en els problemes menys difícils..."[29]

Aquí Poincaré assenyala els tres graons que Weierstrass ha de pujar per aconseguir el seu objectiu:

1. La teoria de les funcions analítiques. Primer les d'una variable i després les de diverses variables.
2. La teoria de les funcions el·líptiques.
3. La teoria de les funcions abelianes.

Encara que l'objectiu de Weierstrass era crear i fonamentar una teoria rigorosa i completa de les funcions abelianes, no hem d'oblidar que pel camí continua ampliant el seu camp de recerca, com ja remarcava Poincaré:

---

[28]« La représentation effective de ces grandeurs, dont l'analyse n'avait encore aucun exemple, l'étude détaillée de leurs propriétés déviant donc l'un des problèmes fondamentaux des Mathématiques ; et, dès que j'en eus compris le sens et l'importance, je résolus de m'y essayer. » Weierstrass, 1857 a Poincaré (1899, 2).

[29]"C'eût été une véritable folie, si j'avais seulement voulu penser à la solution d'un pareil problème, sans m'y être préparé par une étude approfondie des moyens qui devaient m'y aider et sans m'être exercé d'abord sur des problèmes moins difficiles..." Weierstrass, 1857 a Poincaré (1899, 2).

> "Les eines que va crear per aconseguir aquest objectiu podien servir també a d'altres treballs; a dreta i a esquerra de la gran carretera que seguia, ell ha obert vies laterals i hi ha entrat suficientment endavant per mostrar-nos on conduïen."[30]

Així Weierstrass va contribuir també a altres parts de la matemàtica: al càlcul de variacions, als determinants, a les matrius[31] i a les sèries de Fourier, entre d'altres. A tall d'exemple, podem citar la seva contribució als determinants, on Knobloch (1994) analitza les contribucions al desenvolupament històric de la teoria de determinants de Gauss, Cauchy, Jacobi i finament, la recerca axiomàtica de Weierstrass i Kronecker. Knobloch en el seu text aporta evidències que conclouen que l'autoria de la definició de determinant que emprem actualment s'ha d'atribuir a Weierstrass.

3.2. La fonamentació aritmètica de l'Anàlisi a Weierstrass

En aquest apartat analitzarem la fonamentació aritmètica de la teoria de les funcions analítiques que va ser desenvolupada per Weierstrass en els seus cursos. L'any 1881, en l'apartat 6 de l'article citat abans sobre la teoria de les funcions analítiques i abans de presentar el seu famós exemple, Weierstrass ja recorda que el seu camí és diferent de les vies ordinàries de desenvolupament de la teoria de funcions:

> "A les meves Lliçons sobre els elements de la teoria de funcions, he posat en evidència, des del començament, dos teoremes que no s'acorden gens amb les vies ordinàries, a saber que: I. *Si una funció d'una variable real és contínua, no es pot pas concloure que, pels diversos valors de la variable, tingui una derivada determinada;* ***encara menys es pot concloure que posseeix sempre una derivada contínua,*** *almenys en uns intervals definits.* II. *Si una funció d'una variable complexa està definida per una certa regió d'aquesta última, no és pas sempre possible de continuar-la més enllà dels límits d'aquesta regió: en altres termes, existeixen funcions monògenes d'una variable que tenen aquesta propietat, que*

[30] "Les instruments qu'il créait ainsi pouvaient servir à bien d'autres besognes ; à droite et à gauche de la grande route qu'il suivait, il a ouvert bien des voies latérales et il s'y est engagé assez avant pour nous montrer où elles conduisaient. » (Poincaré, 1899, 2).

[31] Sobre l'estudi de les matrius per Weierstrass, vegeu Hawkins (1977).

els punts del pla de la variable, pels quals no pot estar definida, no són pas solament punts aïllats, sinó que formen línies i superfícies."[32]

En la teoria de les funcions analítiques primer hi van treballar Abel i Jacobi, més tard, Augustin Louis Cauchy (1789-1852) imposa que les funcions analítiques han de tenir una derivada contínua. A l'obra de Bernhard Riemann (1826-1866) la imatge geomètrica juga un paper dominant: la funció és una de les lleis que permet transformar les superfícies, es busca doncs representar aquestes transformacions. Weierstrass, en canvi, es situa en un punt de partida diferent: la sèrie de potències, "l'element de la funció" que està confinat en un cercle de convergència.[33] Tot esdevé així una conseqüència de la teoria de sèries i, a més, aquesta teoria ha de ser establerta sobre bases aritmètiques sòlides. Dugac (1973, 60) afirma que Weierstrass "rarament emprava la geometria i quan ho feia, ho feia només a títol d'il·lustració". En el curs de 1874 redactat pel seu deixeble Hettner, Weierstrass ja assenyalava la rellevància de la fonamentació aritmètica en front de la intuició geomètrica:

> "En conseqüència donarem una definició purament aritmètica de les magnituds complexes. La representació geomètrica de les magnituds complexes és mirada per molts matemàtics no com una explicació, sinó com una representació sensorial, mentre la representació aritmètica és una explicació real de les magnituds complexes. A l'Anàlisi necessitem una fonamentació purament aritmètica que era ja donada per Gauss. Encara que la representació geomètrica

[32]« 6. Dans mes Leçons sur les éléments de la théorie des fonctions, j'ai mis en évidence, dès le début, deux théorèmes qui ne s'accordent point avec les vues ordinaires, à savoir que : I. *Si une fonction d'une variable réelle est continue, on ne peut pas en conclure que, pour les diverses valeurs de la variable, elle ait une dérivée déterminée ; encore moins peut-on en conclure qu'elle possède toujours une dérivée continue, au moins dans des intervalles définis.* II. *Si une fonction d'une variable complexe est définie pour une certaine région de cette dernière, il n'est pas toujours possible de la continuer au-delà des limites de cette région : en d'autres termes, il existe des fonctions monogenes d'une variable ayant cette propriété, que les points du plan de la variable, pour lesquels elle ne peut être définie, ne sont pas seulement des points isolés, mais forment des lignes et des surfaces.* » (Weierstrass, 1881, 178-179). Èmfasi afegida.

[33] I afirmava Poincaré (1899, 7): "el mètode de Riemann és un mètode de descobriment i el de Weierstrass, és abans que res un mètode de demostració".

de les magnituds complexes constitueix un mitjà per investigar-les, nosaltres no podem emprar aquesta, l'Anàlisi cal mantenir-lo net de la geometria".[34]

També el seu estudiant Salvatore Pincherle (1853-1936), en el curs de Weierstrass que va publicar l'any 1880, assenyalava que encara que intuïtivament sembli que tota funció contínua admet derivada, a vegades les representacions geomètriques enganyen els nostres ulls i aquest teorema es pot rebatre amb els exemples analítics de funcions no derivables a cap punt trobats en aquell temps, com el famós exemple de Weierstrass citat abans. Després de donar la definició de derivada explicava Pincherle, seguint a Weierstrass:

> "S'ha cregut fins aquest últim temps que ésser contínua bastava a una funció per admetre una derivada; així a molts tractats del Càlcul Diferencial es donen demostracions del teorema: "Tota funció contínua admet una derivada". Però aquestes demostracions afegeixen totes implícitament alguna propietat que no està continguda en el concepte general de funció; i per altra banda basta en donar una qualsevulla demostració dels múltiples exemples de funcions (les quals són efectivament construïdes en aquest últim temps) que són contínues en tot un interval, però que en aquest interval no admeten una derivada a cap punt."[35]

[34]"Wirwerdenferner eine rein arithmetische Definition der complexen Grössengeben. Die geometrische Darstel- lung der complexen Grössen wird von vielen Mathematikern nicht als eine Erklärung, sondern nur als eine Versinnlichung betrachtet, während die arithmetische Darstellung die complexen Grössen wirklich erklärt. Wir bedürfen jedoch für die Analysis eine rein arithmetische Begründung, die schon Gauss gegeben hat. Obgleich die geometrische Repräsentation der complexen Grössen ein wesentliches Hülfsmittel zur Untersuchung derselben ist, können wir sie hier nicht anwenden, da die Analysis von der Geometrie rein erhalten werden muss."(Hettner, curs de Weierstrass, 1874, 5-6). Agraeixo a José Ferreirós que m'ha fet arribar aquest text del curs de Weierstrass, redactat per Hettner i que es una còpia del manuscrit que es troba a l'Institut Matemàtic de Göttingen. Aquesta versió del curs va ser fotocopiada i distribuïda a vàries biblioteques d'Alemanya. La cita ha estat comprovada a la fotocòpia de la biblioteca del *Fachbereich Mathematik*, *Technische Universität*, Darmstadt.

[35]„Si è creduto fino a questi ultimi tempi che l'esser continua bastasse ad una funzione per ammettere una derivata; anzi in molti trattati di Calcolo differenziale si danno dimostrazioni del teorema: „Ogni funzione continua ammette una derivata". Ma queste dimostrazioni somettono tutte implicitamente qualque proprietà che non è contenuta nei concetto generale di funzione; e d'altronde bastano a rendere vana qualunque dimostrazione gli esempi molteplici di funzioni (quali si sono effectivamente construite in questi ultimi tempi) che sono continue in tuto un intervallo, ma in questo intervallo non ammettano una derivata in alcun punto" (Pincherle, 1880, 70).

Tot seguit Pincherle donava un altre exemple de funció contínua no derivable a cap punt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot x)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)}$$

Pincherle afegia, sense demostració ni representació, que aquesta funció és contínua i finita per tots els valors reals de *x* de -∞ a +∞, i no té cap derivada (Pincherle, 1880, 71).

L'exigència d'un mètode de demostració exclusivament aritmètic sense dependre de l'evidència geomètrica dins del model de rigor weierstrassià és el que serà la seva aritmetització de l'Anàlisi.

Weierstrass va començar l'Anàlisi per les seves bases: els nombres, primer els enters, després els racionals i finalment els nombres irracionals, que constituïen la quarta part del seu curs: "Introducció a la teoria de les funcions analítiques", que es repetia cada dos anys.

La fonamentació exacta de l'Anàlisi a Weierstrass requeria doncs una fonamentació aritmètica del concepte dels nombres irracionals construït a partir del nombres racionals. Encara que aquesta construcció també la van portar a terme Charles Meray (1835-1911)[36], Richard Dedekind (1831-1916) per un altre camí, i el seu deixeble Cantor, Weierstrass va fonamentar aritmèticament les funcions analítiques emprant aquesta construcció i va presentar aquesta construcció dels nombres reals sense canvis des de l'any 1865.[37]

Weierstrass parteix de la idea intuïtiva de considerar els nombres reals com sèries finites o infinites de nombres racionals i ho tracta amb tot rigor. Presenta uns nous elements: les parts exactes de la unitat o nombres de la forma 1/*n* i així solucionava tant el problema dels racionals com el dels irracionals. Els considera com "agregats" de la unitat i de les seves parts. Segons Ferreirós (1993, 147),

[36] Sobre Méray vegeu Dugac, 1970.
[37] Dugac explica que el 1861 Weierstrass encara no havia construït la seva teoria dels nombres irracionals, ho farà en el curs de 1865/66 sobre la teoria general de funcions analítiques, publicada més tard per Kossak l'any 1872 (Dugac, 1973, 67-70).

"Tant en el cas dels racionals agregats d'elements finits com en els dels irracionals (agregats infinits) la definició d'igualtat i de les operacions es basaven en la consideració de *sumes finites* d'elements de l'agregat. Així el punt clau és que les sèries emprades fossin convergents i Weierstrass donava com a característica definitòria el que existís un enter *n* més gran que qualsevulla suma de **finits** elements de l'agregat. "

Les diferències amb la construcció de Cantor es troben essencialment en què els reals a la teoria de Weierstrass apareixen com sumes de sèries infinites convergents i en la teoria de Cantor com límits de successions de Cauchy. [38]

3.3. La cerca del rigor

Weierstrass és conegut com el pare de l'Anàlisi moderna.[39] Molts teoremes fonamentals de les branques de l'Anàlisi porten el seu nom, ja sigui perquè ell els va descobrir o per haver estat el primer en donar-ne una demostració completa i rigorosa. Weierstrass, com ja s'ha explicat, començava l'Anàlisi per les seves bases: els nombres, primer els enters, després els racionals i finalment els nombres reals, seguia amb el concepte de funció, la continuïtat i la derivabilitat de les funcions i tot era curosament examinat en els seus cursos i en donava les demostracions rigoroses amb l'ajuda dels símbols delta-èpsilon.

Encara que en el discurs citat de l'any 1857 no apareix cap referència al rigor, en la impartició dels seus cursos, Weierstrass es deuria adonar de la necessitat del rigor a l'Anàlisi, rigor que cercava sempre en les seves demostracions i definicions. Dugac (1973, 77) explica que en el curs de 1874, publicat després pel seu deixeble Hettner, Weierstrass afirmava:

[38] Vegeu més informació i una anàlisis detallada sobre les construccions dels irracionals a Dedekind, Cantor i Weierstrass a Ferreirós, 1993, 139-169.
[39] Per un estudi aprofundit de les contribucions a l'anàlisi per part de Weierstrass són particularment interesants, a més de l'obra de Dugac que s'està emprant, les obres de Bottazzini (1986) i Jahnke (2003).

> “les més grans dificultats de l’Anàlisi Superior venen precisament d’una exposició poc precisa i no suficientment detallada de les nocions bàsiques i de les operacions aritmètiques.”

Richter (1989, 513) afirma que els alumnes de Weierstrass deien dels cursos:

> “sense fissures i de baix a dalt (va construir) tot l’edifici de les Matemàtiques, sense donar per suposat res que ell mateix no hagués demostrat.”[40]

Un altre alumne matisava:

> “El rigor de la demostració i la sistemàtica de l’aplicació tal i com ell les exigia el feien aparèixer com poc apropiat per a facilitar al principiant l’accés a les Matemàtiques Superiors.”[41]

A tall d’exemple es reflexionarà breument sobre la contribució de Weierstrass als conceptes definitoris de l’Anàlisi: el límit, la continuïtat i la derivada en termes de deltes i èpsilons. Quan es pensa en la idea de límit hom pensa en l’infinit, en el procés de “pas al límit” o en les operacions algebraiques indeterminades, en les sèries numèriques que s’apropen o no a un nombre, en la variació dels valors d’una funció o en una magnitud variable geomètrica que s’apropa a una magnitud constant, tots ells pensaments no fàcils de justificar i expressar matemàticament. Per tant, per poder apreciar la contribució de Weierstrass, en aquest cas, es focalitzarà només en la definició del concepte de límit.

Ens hem de remuntar al segle XVII i a un dels matemàtics que va contribuir més en aquesta època al desenvolupament del concepte de límit, Pietro Mengoli (1627-1686). Mengoli va emprendre un camí aritmètic en la seva obra *Geometriae Speciosae Elementa* (1659) i calculà el límit de la suma de potències dels nombres naturals. El seu mètode es va basar en una nova i original teoria anomenada de les "quasi proporcions" fonamentada en

[40] « sin fisuras y de abajo a arriba todo el edificio de las Matemáticas, sin dar por supuesto nada que él mismo no hubiera demostrado.”(Richter, 1989, 513).

[41] « El rigor de la demostración y la sistemática de la aplicación tal y como él las exigía le hacían aparecer como poco apropiado para facilitar al principiante el acceso a las Matemáticas Superiores.”(Richter, 1989, 513).

la idea de quasi raó i en unes taules triangulars que li permetien generalitzar.[42] Va ser un dels primers en intentar donar la definició de límit d'una raó quan el nombre de termes es fa molt gran, també intentà fer la definició quan la raó tendeix a zero i quan tendeix a un nombre. Així quan la raó tendeix a la unitat, Mengoli deia dels seus termes,

> "I [els termes de raons indeterminades determinables] que són més properes a la igualtat que qualsevol raó donada diferent de la igualtat, en la mesura que aquestes raons es van determinant, es diran quasi iguals."[43]

Mengoli aclareix aquesta nova expressió "indeterminat determinable" que empra per definir el límit d'una raó de sumatoris de potències. Els sumatoris de potències de *t* nombres expressats simbòlicament són nombres indeterminats, però queden determinats quan coneixem el valor de *t*. De fet hom pot pensar en una certa dependència entre el valor de *t* i el valor del sumatori; tanmateix el pensament de Mengoli queda encara lluny del concepte general de funció. Per tant, el valor de la raó entre sumatoris indeterminats també és indeterminat encara que igualment és determinable en augmentar el valor de *t*. La raó no arriba a prendre realment aquest valor, que es pot pensar com el valor actual, però "tendeix a aquest valor, s'apropa a aquest valor", que es pot pensar com el valor potencial i quant més augmenta el valor de *t*, més s'hi apropa. Aquest és el sentit de la paraula "determinable" per Mengoli.

Trenta anys més tard i sense que hi hagi cap relació explícita amb Mengoli, Newton en els *Principia* (1687), per definir el límit de raons de manera retòrica, hi feia intervenir el temps,[44]

> "Les quantitats, i també les raons de quantitats, que en un temps donat constantment tendeixen a la igualtat, i que [abans del final d'aquest temps]

---

[42]A més a més, Mengoli fonamentà sòlidament la seva teoria abans d'utilitzar-la. El seu rigor contrasta amb el dels seus contemporanis tant pel que fa a la forma com al contingut. Idees basades en els meus treballs: Massa, 1993 i 1997.

[43]"[Termini ratioindeterminatadeterminabilis, quae in determinari] quaepotestessepropioraequalitati, quàm data quaelibet non aequalitas, quatenus talis, dicetur, Quasi aequalitas." (Mengoli, 1659, 97).

[44] Un treball recent sobre la noció de límit a Newton molt interessant és Pourciau (2001). Pourciau conclou que si Grabiner (1983) reivindica la invenció del èpsilon per Cauchy, ell reivindica el primer delta per a Newton (Puorciau, 2001, 29).

s'acosten mútuament més que qualsevulla diferència donada, al final es fan iguals."[45]

D'Alembert a l'*Encyclopédie* (1751-1765) sobre el terme "límit" explicava*:*

"Es diu que una magnitud és el límit d'una altra magnitud, quan la segona pot acostar-se a la primera més a prop que una magnitud donada, tan petita com hom la pot suposar, sense que la magnitud que s'acosta pugui mai sobre passar la magnitud a la qual s'acosta; de manera que la diferència d'una tal quantitat i el seu límit és absolutament no assignable."[46]

La diferència substancial de la definició de l'*Encyclopédie* amb les raons últimes dels *Principia* de Newton és que no intervé la idea del temps. Però a més, pròpiament parlant, el límit mai coincideix, o mai esdevé igual a la quantitat de la qual és un límit, encara que pot sempre acostar-se més a prop i més a prop, i pot diferir d'aquest tan poc com desitgi.

Més tard, Lagrange en la seva obra sobre les funcions analítiques de 1797 va expressar la necessitat d'emprar quantitats finites i donades, expressades simbòlicament, o sigui emprar l'àlgebra al càlcul i va desacreditar la noció verbal antiga dels límits, la velocitat basada en les fluxions i les primeres i últimes raons de Newton.[47] Així en el títol de la seva obra Lagrange ja expressava aquestes idees,

[45] "Quantitates, ut & quantitatum rationes, quae ad aequalitatem dato tempore constanter tendunt, [& ante finem temporis] & eo pacto propius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo aequales."(Newton, 1687, 26).

[46]"On dit qu'une grandeur est la *limite* d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche, en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa *limite* est absolument inassignable" (Diderot i D'Alembert, 1751-1765, vol. 20, 452).

[47] Sobre la influència de Lagrange en aquest desenvolupament vegeu Grabiner, 1990.

> "Teoria de les funcions analítiques. Contenint els principis del càlcul diferencial, alliberats de tota consideració d'infinitament petits o d'infinitèsims, de límits o de fluxions i reduïts a l'Anàlisi algebraica de les quantitats finites."[48]

No obstant Lagrange no s'adona que seran les desigualtats entre quantitats donades i finites, i no les igualtats, els fonaments del Càlcul. Aquests problemes també van ser analitzats més tard per altres figures, així Cauchy (1821) en el seu curs d'Anàlisi emprarà desigualtats encara que continua amb una definició verbal de límit. Cauchy descrivia doncs el límit de manera retòrica,

> "Quan els valors successivament atribuïts a una mateixa variable s'apropen indefinidament a un valor fixat, de manera que acaben per diferir-ne tan poc com hom voldrà, aquest últim és anomenat el *límit* de tots els altres."[49]

I Cauchy cita dos exemples: els nombres irracionals com a límit de diverses fraccions i l'àrea d'un cercle com la convergència de les àrees dels polígons inscrits al cercle, a mesura que el nombre de costats va augmentant. Cauchy continua amb la idea retòrica d'apropar-se indefinidament o la idea de diferir tan poc com es vulgui i que, expressada d'aquesta manera, és poc quantificable matemàticament.

Tanmateix qui va resoldre de manera rigorosa aquestes definicions precises dels conceptes del càlcul van ser Weierstrass i els seus deixebles, que eliminaren tota vaguetat, cercant el rigor i introduint no només la quantificació sinó també la relació d'ordre entre els símbols. Així Weierstrass, en el curs de 1861 publicat pel seu deixeble Schwarz, expressava,

> "Si és possible determinar una fita δ tal que, per a tot valor de h més petit en valor absolut que δ, $f(x+h)-f(x)$ sigui més petit que una quantitat ε també tan

[48]« Théorie des fonctions analytiques. Contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissant, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies." (Lagrange, 1797).

[49]«Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. » (Cauchy, 1821, 19).

petita com hom vulgui, llavors es dirà que hom ha fet correspondre a una variació infinitament petita de la variable una variació infinitament petita de la funció."[50]

Heinrich Eduard Heine (1821-1881), el 1872 publica a *Crelle* el famós article *Functionenlehre* que conté les definicions de continuïtat i límit, que Weierstrass ja explicava en els seus cursos,[51]

"Es diu que L és el límit de la funció $f(x)$ per $x=a$ si, donat qualsevol ε, existeix un δ_0 tal que per a $0<\delta<\delta_0$ la diferència $f(a\pm\delta)-L$ sigui més petita en valor absolut que ε". (Heine, 1872, 182).

Weierstrass fa un esforç rigorós, basant-se en els seus predecessors, en qüestionar el significat de les paraules tals com "una variable s'apropa indefinidament a un valor fixat," que suggereix temps i moviment, intenta i aconsegueix traduir-ho a desigualtats aritmètiques. Així Weierstrass presenta les definicions rigoroses amb èpsilons i deltes resultant immediatament de la seva quantificació i de la seva relació d'ordre, les modernes i actuals definicions de límit i continuïtat.

4. Algunes reflexions

Aquest estudi suggereix alguns elements de reflexió sobre el context intel·lectual i el pensament matemàtic de Weierstrass. Així hom pot assenyalar la seva lluita exclusiva pels seus objectius de recerca des de les investigacions que feia quan era professor de secundària fins a la Universitat, volent fonamentar sòlidament i rigorosament l'Anàlisi Matemàtica, a través de la seva recerca, del seu ensenyament en els cursos impartits, dels seus deixebles i del seminari de matemàtiques creat a la Universitat de Berlín.

La investigació mostra l'interès de Weierstrass en què tot el que es publiqués derivat de les seves investigacions fos cert i rigorós, per ell l'important no era l'autoria de la publicació, ni que ell fos citat, sinó que es pogués fer progressar veritablement el

[50] "S'il est possible de déterminer une borne δ telle que pour toute valeur de *h* plus petite en valeur absolue que δ, $f(x+h)-f(x)$ soit plus petite qu'une quantité ε aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable, une variation infiniment petite de la fonction."(Dugac, 1973, 64).

[51] Encara que Heine no va ser estudiant de Weierstrass, coneixia la seva recerca d'Anàlisi a través dels seus alumnes Cantor i Schwarz (Jahnke, 2003, 186).

coneixement científic. Aquest vessant generós envers la recerca no era ni de bon tros habitual a l'època.

L'estudi ens mostra les idees de Weierstrass sobre l'ensenyament emprant les fonts originals i propiciant que els alumnes desenvolupin la seva pròpia recerca, de fet la millor manera d'aprendre matemàtiques i de fer avançar el coneixement matemàtic.

Aquest estudi ens porta a pensar que calen més investigacions sobre les contribucions de Weiertrass, que probablement suggeriran vies noves per desenvolupar, alhora que caldria també investigar els efectes sobre el desenvolupament de les matemàtiques d'aquests seminaris i escoles formats a les universitats del segle XIX.

La investigació aporta molts elements de discussió sobre les matemàtiques: Intuïcionisme o logicisme? En quins cassos? Poincaré (1899, 7), quan comparava les recerques de Riemann i Weierstrass, explicava que Riemann emprava com instrument la intuïció, així ho veia tot d'un cop d'ull, com un viatger que mira des de dalt d'una muntanya, en canvi Weierstrass, prenia com instrument l'anàlisi i feia veure tots els recons amb claredat. Llavors hom es pregunta, es comprèn millor una demostració fent totes les operacions elementals i detallades? No cal la intuïció? No cal la geometria? O calen els dos vessants per entendre les demostracions i avançar en el coneixement?[52]

Altres preguntes que hom es pot fer referides més específicament al pensament matemàtic de Weierstrass són: La contribució de Weierstrass al desenvolupament de l'anàlisi ha permès nous resultats? El límit, les derivades, la noció de veïnatge, tal com ho presenta Weierstrass, són determinants per avançar en el càlcul?

Per finalitzar, es deixen les últimes reflexions sobre les contribucions de Weierstrass a un dels grans, Hilbert, que, a Münster el 1925, en l'homenatge a Weierstrass amb motiu dels 100 anys del seu naixement, afirmava,

> "Weierstrass, mitjançant una crítica conduïda amb magistral profunditat, va proveir a l'Anàlisi Matemàtica d'una base sòlida. En dilucidar entre d'altres sobre les nocions de mínim, de funció, de derivada, ha eliminat les objeccions que

[52]Una lectura acurada del llibre de Poincaré (1920) resulta imprescindible per enriquir aquesta discussió.

encara suscitava el càlcul infinitesimal, netejant-lo de totes les idees confuses sobre allò infinitament gran i allò infinitament petit i ha definitivament superat les dificultats que provenen de les nocions mateixes d'infinitament gran i d'infinitament petit."[53]

A la vegada, Hilbert agraïa a les contribucions de Weierstrass l'harmonia existent actualment en l'Anàlisi:

> "Si avui, gràcies als mètodes que reposen sobre la noció de nombre irracional, o més en general, sobre la de límit, regna en l'Anàlisi una harmonia i una certitud perfectes, i si, en les qüestions més complicades de la teoria d'equacions diferencials i integrals, malgrat les combinacions més dures i més diverses de totes les maneres de pas al límit, tots els resultats es troben d'acord, nosaltres ho devem essencialment a l'activitat científica de Weierstrass."[54]

5. Bibliografia

Begehr, H. G. W. Et al. (1998). *Mathematics in Berlin,* Birkhäuser Verlag, Berlin, 61-82.

Biermann, K. R. (1970-1990)."Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm", *Dictionary of Scientific Biography,* New York, 219-224.

Bölling, R. (1989). "A birthday present", *The Mathematical Intelligencer* **11** (4), 20-25.

Bölling, R. (1994). *Das Fotoalbum für Weierstraß / A Photo Album for Weierstrass* (German Edition), Braunschweig, Vieweg.

[53]« Weierstrass au moyen de sa critique maniée avec une pénétration magistrale, a donné une base solide à l'analyse mathématique. En élucidant entre autres les notions de minimum, de fonction, de dérivée, il a écarté les objections que soulevait encore le calcul infinitésimal, il a nettoyé celui-ci de toutes les idées confuses sur l'infiniment grand et l'infiniment petit, et a définitivement surmonté les difficultés qui provenaient des notions mêmes d'infiniment grand et d'infiniment petit." (Hilbert, 1926, 91).

[54]« Si aujourd'hui, grâce aux méthodes qui reposent sur la notion de nombre irrationnel, ou plus généralement sur celle de limite, il règne en analyse une harmonie et une certitude parfaites; et si, dans les questions les plus compliquées de la théorie des équations différentielles et intégrales, malgré les combinaisons les plus hardies et les plus diverses de toutes les formes de passage à la limite, tous les résultats se trouvent en accord, nous le devons essentiellement à l'activité scientifique de Weierstrass."(Hilbert, 1926, 91).

Bottazini, U. (1986). *The Higher Calculus. A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass,* Springer, Nova York.

Bräting, K. (2012). “Ambiguities of Fundamental Concepts in Mathematical Analysis During the Mid-nineteenth Century”, *Foundations of Science* **17** (4)**,** 301-320.

Calinger, R. (1996). “The mathematics seminar at the University of Berlin: origins, founding and the Kummer-Weierstrass years”. A: R. Calinger (Ed.) *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching,* The Mathematical Association of America, Washington, DC, 153-176.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d’Analyse de l’École Polytechnique,* Debure*,* Paris.

Détraz, J. (1993). *Sonia Kovalevskaïa, 1850-1891. L’aventure d’une mathématicienne,* Éditions Belin, Paris.

Diderot, D. i D’Alembert, J. L. R., (1751-1765). *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, par une Société de Gens de Lettres,* Chez Briason, Chez David, Chez Le Breton, Chez Durand, Paris.

Du Bois-Reymond, P. (1875).”Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen”, *Crelle,* Issue 79, 21-37.

Dugac, P. (1970). “Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite”, *Revue d’Histoire des sciences et de leurs Applications* **23** (4), 333-350.

Dugac, P. (1973). “Eléments d’analyse de Karl Weierstrass”, *Archive for History of Exact Sciences* **10** (1-2), 41-176.

Ferreirós, J. (1993). *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908,* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Grabiner, J. V. (1983). “Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus”, *The American Mathematical Monthly* **90**, 185-194.

Grabiner, J. V. (1990).*The Calculus as Algebra. J.L Lagrange, 1736-1813,* Garland Publishing Inc., Nova York &Londres.

Hawkins, T. (1977). “Weierstrass and the Theory of Matrices”, *Archive for History of Exact Sciences* **17** (2), 119-163.

Heine, H. E. (1872). “Die Elemente der Functionenlehre”, *Crelle,* Issue **74**, 172-188.

Hermite, Ch. (1897). “Notice sur Weierstrass”, *C. R. Acad. Sci. Paris* **124**, 430-433.

Hilbert, D. (1926). “Sur l’infini”, *Acta Mathematica* **48**, 91-122.

Jahnke, H.N. (ed.) (2003). *A History of Analysis*, American Mathematical Society, USA.

Knobloch, E. (1994).“From Gauss to Weierstrass: Determinant Theory and Its Historical Evaluation”. A: Chikara, Mitsuo i Dauben (eds.) *The Intersection of History and Mathematics,* Birkhäuser Verlag, Berlin, 51-66.

Lagrange, J-L. (1797). *Théorie des functions analytiques. Contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d’infiniment petits ou d’évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l’analyse algébrique des quantités finies,* Imprimérie de la république, An V, Paris.

Manning, K. R. (1975). “The emergence of the Weierstrassian approach to complex analysis”, *Archive for History of Exact Sciences* **14** (4), 297-383.

Massa-Esteve, M. R. (1993). *Anàlisi didàctica dels conceptes de límit i continuïtat utilitzant fonts epistemològiques,* Llicència d’estudis del Departament d’Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, Barcelona.

Massa-Esteve, M. R. (1997). “Mengoli on “Quasi Proportions””, *Historia Mathematica* **24** (3), 257-280.

Massa-Esteve, M. R. (2012). “The role of symbolic Language in the transformation of mathematics”, *Philosophica* **87**, 153-193.

Mengoli, P. (1659). *Geometriae Speciosae Elementa,* Bolonya.

Mehrtens, H., Bos, H. I Schneider, I. (eds.) (1981). *Social History of Nineteenth Century Mathematics,* Birkhäuser, Boston.

Mittag-Leffler, G. (1902). “Une page de la vie de Weierstrass”, *Compte rendu du deuxième Congrès International des mathématiciens,* Paris, 131-153.

Mittag-Leffler, G. (1923). “Weierstrass et Sonia Kowalewsky”, *Acta Mathematica* **39***,* 133-198.

Neuenschwander, E. (1981). “Studies in thehistory of complex function theory II: Interactions among the French School, Riemann, and Weierstrass”, *Bulletin of the American Mathematical Society* Vol. 5, Nº 2, 97-105.

Newton, I. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* Jussu Societaties Regiae ac Typis Joseph Streater, Londres.

Picard, E. (1897). “Karl Weierstrass”, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées,* 173-174.

Pierpont, J. (1999). “The History of Mathematics in the NineteenthCentury”, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society,* Vol. 37, Nº 1, 9-24.

Pincherle, S. (1880). *Saggio di una introduzione alla Teoria delle Funzioni Analitiche secondo i principi del Prof. C. Weierstrass compilato dal Dott. S. Pincherle,* Benedetto Pellerano Editore, Napoli.

Poincaré, H. (1899). “L’oeuvre mathématique de Weierstrass”, *Acta Mathematica* **22** , 1-18.

Poincaré, H. (1920). *La valeur de la Science,* Flammarion, Paris.

Pourciau, B. (2001) . “Newton and the Notion of Limit”, *Historia Mathematica* **28,** 18-30.

Richter, K. (1989).“Weierstrass”. A: Wussing, H. & Arnold, W. (ed.), *Biografias de grandes matemáticos,* Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 496 – 518. (Versió original alemanya, 1983).

Schubring, G. (1998). “NOTE. An Unknown Part of Weierstrass Nachlass”, *Historia Mathematica* **25**, 423-430.

Weierstrass, K. (1854). “ZurTheorie der *Abel*schen Functionen”, *Crelle,* Issue **47**, 289-306.

Weierstrass, K. (1856). “Theorie der Abel’schen Functionen”, *Crelle,* Issue **52**, 285-380.

Weierstrass, K. (1881).”Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques”, *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques,* 2ª série, tome 5, nº 1, 157-183.

Weierstrass, K. (1894). *Mathematische Werke, Band I,* Mayer und Müller, Berlin.

Weierstrass, K. (1894-1927). “Ansprache bei der Übernahme des Rectorats der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 15 October 1873”. A: Weierstrass, Karl, 1815-1897, Knoblauch, Johannes, ed. 1855-1915., Hettner, Georg, ed. 1854-1914, Rothe, Rudolf Ernst, ed. 1873-1942., *Mathematische werke von Karl Weierstrass. Herausgegeben unter mitwirkung einer von der Königlich preussischen akademie der wissenschaften eingesetzten commission.* Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Mayer & Müller, Berlin, 331-349.